頂点作用素代数と作用素環の表現論 (代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究)

河東, 泰之

数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 1-5

頂点作用素代数と作用素環の表現論

東京大学大学院数理科学研究科・Kavli IPMU (WPI)
河東泰之 (Yasuyuki KAWAHIGASHI)
URL: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

1 はじめに

頂点作用素代数と，(作用素環に基づく) 局所共形ネットはどちらもカイラル共形場理論を数学的に公理化したものなので，本質的に同じものであるはずである．正確には，作用素環では Hilbert 空間を必要とするので，対応する頂点作用素代数はユニタリ性を満たすことが必要である．ユニタリ性を仮定しておけば，ある弱い条件を満たす頂点作用素代数から，対応する局所共形ネットが作れ，またこの局所共形ネットから頂点作用素代数に戻れることが [1] によって示されている．さらに，ある簡単な十分条件からこの「弱い条件」が従うことが知られており，さらにこの「弱い条件」を満たさないユニタリな頂点作用素代数の具体例は一つも知られていない．この意味で，頂点作用素代数と局所共形ネットは対応している．両者の表現論も自然な意味で対応がつくはずだが，これについては満足すべき結果は得られていない．本稿では，頂点作用素代数とその表現論を知っている人に，局所共形ネットとその表現論を解説したい．詳しい解説論文として [2] を，その圧縮版として [3] を挙げておく．詳しくはこれらで引用されている文献を見ていただきたい．

2 局所共形ネット

作用素環に基づく場の量子論の基本的な考え方は次のとおりである．

時空と時空対称性の群と，時空の上の量子場がある．量子場とはある種の作用素値超関数である．時空領域 O に対し，作用素値超関数 Φ と，O に台を持つ試験関数 f を考えると作用素 $\langle\Phi, f\rangle$ は (自己共役であれば)O での観測可能量を表す．Φ と f を動かして，これらの作用素の生成する作用素環 $A(O)$ を作ると，O でパラメトライズされた作用素環の族 $\{A(O)\}$ が物理理論を記述している．

カイラル共形場理論の場合は，$1+1$ 次元の Minkowski 空間を二つに分解してコンパクト化するので，時空に当たるものは S^1 であり，その対称性の群は $\mathrm{Diff}(S^1)$ (向きを保つ C^∞ 同相写像全体) である．時空領域に当たるものは空でも稠密でもない連結開

部分集合であり，このようなS^1の部分集合を区間という．区間ごとに作用素環(フォンノイマン環) $A(I)$の族があって，次の公理を満たすときに局所共形ネットという．

1. (Isotony) 区間$I_1 \subset I_2$に対し，$A(I_1) \subset A(I_2)$となる．
2. (Locality) 区間I_1, I_2が交わらなければ$[A(I_1), A(I_2)] = 0$となる．
3. (Möbius covariance) $PSL(2,\mathbb{R})$のユニタリ表現Uで，$g \in PSL(2,\mathbb{R})$に対し$U(g)A(I)U(g)^* = A(gI)$となるものがある．ここでgはS^1上に$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$の1次分数変換として作用する．
4. (Conformal covariance) 上と同じ記号で表される$\mathrm{Diff}(S^1)$の射影ユニタリ表現Uで，$PSL(2,\mathbb{R})$の表現を拡張し，
$$\begin{aligned} U(g)A(I)U(g)^* &= A(gI), \quad g \in \mathrm{Diff}(S^1), \\ U(g)xU(g)^* &= x, \quad x \in A(I),\ g \in \mathrm{Diff}(I'), \end{aligned}$$
となるものがある．ここでI'はIの補集合の内部であり，$\mathrm{Diff}(I')$は$\mathrm{Diff}(S^1)$の元でI上恒等写像となるものの集合である．．
5. (Positive energy condition) UをS^1の回転群に制限したものの生成元は正である．
6. (Existence of the vacuum vector) 真空ベクトルと呼ばれる，Hilbert空間の長さ1の元Ωがあり，Uの$PSL(2,\mathbb{R})$への制限で固定され，$(\bigvee_{I\subset S^1} A(I))\Omega$がHilbert空間で稠密となる．
7. (Irreducibility) フォンノイマン環$\bigvee_{I\subset S^1} A(I)$はHilbert空間上のすべての有界線形作用素全体のなす環である．

一つの局所共形ネットが一つのカイラル共形場理論を表し，一つの(ユニタリな)頂点作用素代数に対応するはずのものである．

3 局所共形ネットの表現論

局所共形ネットは定義によって初めからあるHilbert空間に作用している．これを別のHilbert空間に作用させるものが局所共形ネットの表現である．$A(I)$たちが他のHilbert空間に一斉に作用しており，$I_1 \subset I_2$のとき$A(I_1) \subset A(I_2)$という包含関係が保たれているとき，これを表現という．本当は$\mathrm{Diff}(S^1)$の作用も組で考えないといけないが，今考えているような状況ではこちらの作用は自動的に従うので気にしないことにする．区間のうちI_0を一つ固定する．表現は，環$A(I_0)$の自己準同型ρを与え，この自己準同型ρが表現のすべての情報を持っているというのがDoplicher-Haag-Roberts

理論 (を適当に読み直したもの) である．表現の直和，既約分解は自己準同型の直和，既約分解に対応し，自己準同型の像の Jones 指数の平方根が次元の概念を与える．これは 1 以上 (∞ も許す) の実数値を取る．またもとの Hilbert 空間への作用は真空表現と呼ばれ，自明表現の役割を果たす．

自己準同型は合成できる．こうしてできる新しい自己準同型がまた表現に対応する．この操作が表現のテンソル積に当たるものである．これによって有限次元表現たちがテンソル圏をなす．自己準同型の合成が可換である理由は何もないように見えるが，実際は $\lambda\rho$ と $\rho\lambda$ はユニタリ同値になる．この同値を与えるユニタリが非自明なもので，braiding と呼ばれるものになっている．これによって有限次元表現たちは組紐圏をなす．

4　完全有理性と α-induction

1 のべき根における量子群の表現論では，既約表現が有限個しかないという状況が多くの研究者の興味を引いている．これはもちろん，有限群の表現論に対応する状況である．共形場理論ではこの種の有限性をしばしば有理性という．局所共形ネットがいつ有理的になるかを判定することが重要である．これについて，Kawahigashi-Longo-Müger は Jones index を用いて μ-index というものを導入し，既約表現が有限個でそれらがすべて有限次元となることの必要十分条件は μ-index が有限になることであることを証明した．このとき局所共形ネットは完全有理的であるという．μ-index の定義には局所共形ネットの表現は使わない．さらに同じ論文で Kawahigashi-Longo-Müger は，完全有理的な場合には表現の持つ braiding は非退化であることも証明した．このようなとき有限次元表現のなす圏はモジュラーテンソル圏であるという．

$\{A(I) \subset B(I)\}$ を局所共形ネットの包含とする．$\{A(I)\}$ が完全有理的な場合は，$\{B(I)\}$ も自動的に完全有理的になる．$\{B(I)\}$ が完全有理的な場合は，Jones 指数 $[B(I) : A(I)]$ (I によらない) が有限であれば $\{A(I)\}$ の完全有理的になる．このことは μ-index の定義と Kawahigashi-Longo-Müger の結果から直ちに従う．これより，$\{B(I)\}$ が完全有理的であれば，その有限群作用による不動点環 (orbifold) も完全有理的であることがすぐにわかる．これも作用素環を用いた手法の強力さを示す例である．

さらに $\{A(I) \subset B(I)\}$ を局所共形ネットの包含とし．$\{A(I)\}$ が完全有理的であるとする．群の表現の場合は，部分群の表現から大きい群の表現を作る誘導表現というものがある．この類似として，$\{A(I)\}$ の表現 λ から $\{B(I)\}$ の表現を作る方法を考えたい．すると，実際にはできるものは $\{B(I)\}$ の表現には近いが表現そのものではないことがわかる．また誘導を行う際には $\{A(I)\}$ の表現の braiding が必要であり，braiding の交差の $\pm$ を指定しなくてはいけないこともわかる．こうしてできるものを $\alpha^+_\lambda, \alpha^-_\lambda$ と書き，α 誘導という．これは Longo-Rehren によって導入され，Xu, Böckenhauer-Evans によって研究がすすめられた．一方 Ocneanu は全く違った動機と手法から研究を進めていたが，それは α 誘導と統一できることが Böckenhauer-Evans-Kawahigashi によっ

て証明された．さらに $\{B(I)\}$ の既約表現はぴったり，α^+ 誘導で生じる既約表現のようなものと α^- 誘導で生じる既約表現のようなものとの共通部分であることが示される．これは，Böckenhauer-Evans-Kawahigashi と Kawahigashi-Longo-Müger の結果を合わせることによりわかる．

さらに上の設定で，$Z_{\lambda,\mu} = \dim \mathrm{Hom}(\alpha_\lambda^+, \alpha_\mu^-)$ とおく．ただし λ, μ は $\{A(I)\}$ の既約表現である．これによって成分が非負整数の行列 Z ができる．一方，$\{A(I)\}$ の表現の持つ braiding から，いわゆる S 行列，T 行列を用いて $SL(2,\mathbb{Z})$ のユニタリ表現が得られる．(次元は $\{A(I)\}$ の既約表現の個数である．) Böckenhauer-Evans-Kawahigashi はこの状況下で，Z が $SL(2,\mathbb{Z})$ のユニタリ表現の commutant に入ることを証明した．このような行列は modular invariant と呼ばれる．一般に完全有理的な $\{A(I)\}$ に対し modular invariant は有限個しかないことが簡単に示される．具体例ではこの有限個が 2,3 個など，とても小さいこともよくある．$\{A(I)\}$ の表現のなすモジュラーテンソル圏が Wess-Zumino-Witten model $SU(2)_k$, $SU(3)_k$ などである場合がそうであり，Cappelli-Itzykson-Zuber, Gannon らによって明示的な modular invariant のリストが得られている．

完全有理的な $\{A(I)\}$ が与えられたとき，上で述べたようにまず modular invariant を分類し，次にその各々について，対応する $\{B(I)\}$ が存在するか，一意的か，を調べる．(ここは一般論がなく，ケースバイケースの論法が必要である．一般には $\{B(I)\}$ が存在するとも一意的であるとも限らない．) これによって (少なくとも原理的には) すべての $\{B(I)\}$ を分類することができる．すなわち，完全有理的な $\{A(I)\}$ に対し，その拡大ネット $\{B(I)\}$ は原理的には分類可能である．

$\mathrm{Diff}(S^1)$ の射影的ユニタリ表現から局所共形ネットが作れる．これは任意の局所共形ネットの部分ネットとして含まれるものである．よく知られた無限次元 Lie 環である Virasoro 代数のユニタリ表現から生じるものとも解釈できるので，Virasoro ネットと呼ぶ．これには central charge と呼ばれる正実数値を取る普遍量がある．この値は通常 c と書かれる．Friedan-Qiu-Shenker, Goddard-Kent-Olive により，c の取りうる値は

$$\{1 - 6/m(m+1) \mid m = 3, 4, 5, \dots\} \cup [1, \infty)$$

であることが知られている．Virasoro ネットの central charge c を指定したものを $\{\mathrm{Vir}_c(I)\}$ と書く．$c < 1$ のときはこれは coset 構成法で実現でき，完全有理的になることがわかる．(Xu の結果を用いる．また $c \geq 1$ のときは完全有理的ではない．) 上述の拡大ネットの分類法を用いると，Virasoro ネット $(c < 1)$ の拡大ネットが完全に分類できる．これは $c < 1$ である任意の局所共形ネットの分類と言ってよく，その分類リストは次のようになる．(Kawahigashi-Longo による．)

1. Virasoro ネットそのもの．$\{\mathrm{Vir}_c(I)\}$, $c < 1$.

2. その指数 2 の単純カレント拡大.

3. $c = 21/22$, $25/26$, $144/145$, $154/155$ における 4 つの例外.

このリストの１番目と２番目は何も驚くことはない．３番目については Frobenius 代数による拡大と呼ばれる手法を用いる．４つのうち３つについては coset 構成法でも作れることが知られているが，$c = 144/145$ については Frobenius 代数によらない構成法は知られていない．Frobenius 代数による拡大の構成は，局所共形ネットについては Longo-Rehren によって導入されたが，頂点作用素代数でも Huang-Kirillov-Lepowsky の結果が出たので同様の手法が適用できる．

参考文献

[1] S. Carpi, Y. Kawahigashi, R. Longo and M. Weiner, From vertex operator algebras to conformal nets and back, arXiv:1503.01260, to appear in *Mem. Amer. Math. Soc.*

[2] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, tensor categories and operator algebras, *J. Phys. A* **48** (2015), 303001, 57 pp.

[3] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, vertex operator algebras and operator algebras, arXiv:1711.11349, to appear in Proceedings of ICM 2018.